

考虑磁滞特性的定点时步有限元法及 组合铁心励磁特性研究

陈谷雨¹, 李琳¹, 吴胜威¹, 宋文乐², 王磊²

- (1. 新能源电力系统国家重点实验室(华北电力大学), 北京市 昌平区 102206;
2. 国网河北省电力有限公司沧州供电分公司, 河北省 沧州市 061000)

Fixed-point Time Step Finite Element Method Considering Hysteresis and Study of Excitation Characteristics of Composite Core

CHEN Guyu¹, LI Lin¹, WU Shengwei¹, SONG Wenle², WANG Lei²

- (1. State Key Laboratory of Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources (North China Electric Power University), Changping District, Beijing 102206, China;
2. Cangzhou Power Supply Branch, State Grid Hebei Electric Power Co., Ltd., Cangzhou 061000, Hebei Province, China)

ABSTRACT: To address the non-convergence issue in nonlinear iterations caused by improper reluctivity selection during hysteresis-aware time-stepping finite element analysis, this paper presents a magnetic reluctivity selection method. The proposed approach dynamically adjusts the convergence factor at each time step by setting a threshold, thereby stabilizing the iteration process. First, the two-dimensional magnetic field finite element equation of magnetic vector potential and excitation current is established using the fixed-point method, and the fixed-point permeability is introduced to address the nonlinear issue. Second, the field-circuit coupling relationship is established based on the electromagnetic induction law, and the Jiles-Atherton hysteresis model is utilized to characterize the core's hysteresis characteristics, thus a field-circuit coupling model considering hysteresis is formed. Then, the threshold is introduced to solve the convergence difficulties in the nonlinear iterative process. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by applying it to a composite core made of amorphous alloy and grain-oriented silicon steel, from which the excitation current, magnetic flux density distribution, and no-load loss are successfully computed.

KEY WORDS: fixed-point method; time step finite element method; J-A hysteresis model; field-circuit coupling model; composite core

摘要: 针对考虑磁滞特性时步有限元法中磁阻率选取不当, 导致非线性迭代无法收敛的问题, 提出一种通过设置阈值,

并在每个时间步动态改变收敛因子的磁阻率选取方法。首先, 基于固定点法建立关于矢量磁位和励磁电流的二维磁场有限元方程, 引入定点磁阻率处理材料非线性问题; 其次, 根据电磁感应定律建立磁场-电路耦合关系, 并采用 Jiles-Atherton 磁滞模型表征铁心的磁滞效应, 从而形成考虑磁滞的场路耦合模型; 再次, 引入阈值解决非线性迭代过程中的收敛难题; 最后, 利用该方法求解非晶合金-取向硅钢组合铁心的励磁电流、磁通密度分布以及空载损耗, 并通过实验验证所提方法的有效性。

关键词: 固定点法; 时步有限元; J-A 磁滞模型; 场路耦合模型; 组合铁心

0 引言

时域有限元方法广泛应用于分析变压器铁心的励磁特性^[1]。该方法通常基于磁场-电路耦合理论, 将电路模型中的未知参数引入到电磁场方程中, 同时考虑铁心内部电磁过程及外部电路约束。但计算中铁心的非线性磁化特性多使用单值 B-H 曲线方程描述^[2-3], 而实际上铁磁材料具有磁滞效应, 这导致计算结果与实验测量存在较大偏差。因此, 在场路耦合计算中考虑铁心的磁滞效应, 能显著提升励磁特性分析的准确性与可靠性。选择何种磁滞模型以及采用哪种方法对磁场中的非线性迭代问题进行处理是该问题的研究重点^[4]。

当前, 描述磁性材料磁滞效应的模型主要包括 Energetic 磁滞模型^[5-6]、Preisach 磁滞模型^[7-8]和 Jiles-Atherton(J-A)磁滞模型^[9-12]。其中, Energetic

基金项目: 国家电网有限公司科技项目(5500-202313120A-1-1-ZN)。Scientific Technology Project of State Grid Corporation of China (5500-202313120A-1-1-ZN)。

模型是一种基于磁性材料磁畴的能量守恒原理与统计特性的现象学模型,表达式简单,但其模型参数较多,且在一些特定条件下得到的磁滞回线不光滑。Preisach 模型使用数学方法来描述磁性材料的磁化特性,但其复杂的分布函数导致计算量大,且其应用范围受到了同余性的限制。J-A 磁滞模型通过描述钉扎效应下的磁畴壁移动来刻画磁滞现象。该模型兼具参数少、物理意义明确的双重优势,且易于在有限元中实现,计算效率高,因而成为模拟铁心磁滞效应时最常用的模型。

目前,主要用牛顿-拉夫逊法和固定点法对含磁滞效应的铁心非线性迭代问题进行处理^[13]。其中,牛顿-拉夫逊法虽收敛速度快,但在考虑磁滞效应时,其迭代过程容易失稳,从而导致计算不收敛^[14]。在这种情况下,通常采用具有鲁棒性的固定点法,而其收敛性与定点磁阻率的取值密切相关^[15]。经典固定点法认为在整个求解域和所有时间步的磁阻率均为真空磁阻率的一半时,总能保证收敛,然而该方法收敛速度慢,计算时间长^[16-17]。为此,Dlala 等提出了引入收敛因子 C 的局部系数法,该方法能够减少迭代次数,但如果收敛因子 C 选择不当,则无法保证收敛^[18-20]。然而,目前收敛因子的选择主要依靠经验,同时在考虑磁滞效应时,磁滞回线在矫顽力附近的磁阻率迅速减小,在铁心达到饱和时又迅速增大,磁阻率的显著变化将导致部分时刻的迭代次数增加,甚至不收敛^[21]。

目前,铁心的组成材料主要有取向硅钢和非晶合金两种^[22]。其中,后者的空载损耗小,但其抗短路能力差、振动噪声大;而前者恰好与其相反,抗短路能力强且振动噪声小,但空载损耗大。因此,将二者组合,可以充分发挥各自的优势。

本文提出一种通过设置阈值,并在每个时间步动态改变收敛因子来确定磁阻率的方法。以非晶合金(AYFAA-N)-取向硅钢(B18R075)组合铁心为研究对象,两种材料的非线性磁化特性均用 J-A 模型来描述,并建立磁场-电路耦合模型,计算组合铁心的励磁电流、磁通密度分布以及空载损耗,并通过实验验证本文所提方法的有效性。

1 定点时步有限元法

以矢量磁位 $\mathbf{A}$ 为求解变量的二维磁场边值问题^[23],可以表示为

$$\begin{cases} \Omega: \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} \\ \Gamma: \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: Ω 为求解域; Γ 为场域边界; ν 为铁心材料磁阻率; $\mathbf{J}$ 为电流密度矢量; $\mathbf{n}$ 为边界的法向量。

引入定点磁阻率 ν_{FP} ,将磁场强度分为线性和非线性两部分,磁场强度 $\mathbf{H}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的非线性关系可表示为

$$\mathbf{H} = \nu_{\text{FP}} \mathbf{B} + \mathbf{T} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{T}$ 为磁场强度的非线性分量,称为类磁化强度。

结合麦克斯韦方程,得到场域微分方程:

$$\nabla \times \nu_{\text{FP}} \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J} \quad (3)$$

利用伽辽金加权余量法,方程可以写为

$$\int_{\Omega} \nu_{\text{FP}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega} \left(N_i \frac{NI}{S} \right) dx dy = \int_{\Omega} \left(T_x \frac{\partial N_i}{\partial y} - T_y \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dx dy \quad (4)$$

采用三角形单元对求解域进行划分,矢量磁位 $\mathbf{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n_p} N_j \mathbf{A}_j \quad (5)$$

式中: n_p 为节点总数; N_j 为第 j 个节点对应的线性插值基函数; $\mathbf{A}_j$ 为第 j 个节点的矢量磁位。

将式(5)代入式(4),并考虑狄利克雷边界条件,形成矩阵方程为

$$\mathbf{KA} + \mathbf{PI} = \mathbf{M} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{K}(i, j) = \sum_{i,j} \iint_{\Omega_e} \nu_{\text{FP}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\ \mathbf{P}(i, k) = \sum_i \iint_{\Omega_e} \alpha_k N_i \frac{N}{S_w} dx dy \\ \mathbf{M}(i) = \sum_i \iint_{\Omega_e} \left(T_x \frac{\partial N_i}{\partial y} - T_y \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dx dy \end{cases} \quad (7)$$

式中: i, j 为场域节点编号; e 为三角形单元编号; k 为绕组编号; i 为单元 e 内与节点 i 相连的单元; Ω_e 为单元 e 的积分域; $\mathbf{K}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{A}$ 为矢量磁位列向量; $\mathbf{P}$ 为激励源向量; α_k 为绕组方向相关系数,电流流入时取 $\alpha_k=1$,电流流出时取 $\alpha_k=-1$; N 为绕组匝数; S 为绕组截面积; $\mathbf{I}$ 为绕组电流列向量; $\mathbf{M}$ 为与类磁化强度相关的矩阵; T_x 、 T_y 分别为磁场强度非线性分量的 x 和 y 方向向量。

2 考虑磁滞特性的场路耦合模型

2.1 磁场-电路耦合模型

组合铁心的场路耦合模型如图1所示。图中: R 和 L 分别为等效电阻和电感; T_r 为等效变压器即

本文组合铁心。列写回路方程为

$$u = \varepsilon + RI + L \frac{dI}{dt} = N \frac{d(\oint_{l_w} A dl)}{dt} + RI + L \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

式中： u 为施加在绕组上的励磁电压； ε 为磁动势； N 为线圈匝数； l_w 为绕组围成的闭合曲线； I 为绕组励磁电流。

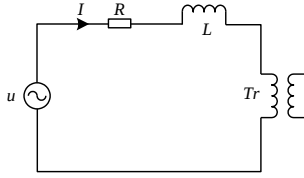


图 1 组合铁心的场路耦合模型

Fig. 1 Field-circuit coupling model of composite core

将式(8)中矢量磁位用式(4)所示的插值函数表示， u 的表达式为

$$u = C_w \frac{dA}{dt} + K_R I + K_L \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

其中：

$$\begin{cases} C_w(k, i) = \sum_{i \in e \in w_k} (\alpha_k N_{eq} S_e) / (3S) \\ K_R(k, k) = R \\ K_L(k, k) = L \end{cases}$$

式中： l_{eq} 为铁心 2D 模型在 z 方向的等效厚度； S_e 为单元 e 的面积； C_w 、 K_R 、 K_L 分别为与绕组分布、线路等效电阻 R 和等效电感 L 相关的方程系数矩阵，其中 C_w 又称为场路耦合矩阵。

采用向后差分法，并联立式(6)、(9)，建立完整的定点有限元的时步迭代格式，如式(10)所示。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P} \\ \frac{\mathbf{C}_w}{\Delta t} & \mathbf{K}_R + \frac{\mathbf{K}_L}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t_k) \\ \mathbf{I}(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{C}_w}{\Delta t} & -\frac{\mathbf{K}_L}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t_{k-1}) \\ \mathbf{I}(t_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t_k) \\ \mathbf{U}(t_k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.2 磁滞特性表征

J-A 模型通过描述磁畴壁在钉扎效应下的运动，来表征软磁材料的非线性磁化行为与磁滞回线^[9]。该模型将磁化强度 M 分为两部分：

$$M = M_{rev} + M_{irr} \quad (11)$$

式中： M_{rev} 为可逆磁化强度，源于磁畴壁的弯曲； M_{irr} 为不可逆磁化强度，源于磁畴壁的位移^[24]。

M_{rev} 与 M_{irr} 之间的关系可表示为

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (12)$$

式中： c 为可逆系数； M_{an} 为无磁滞磁化强度，表示材料的最小能量状态，可以描述为：

$$M_{an} = M_s [\coth(\frac{H_e}{a}) - (\frac{a}{H_e})] \quad (13)$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (14)$$

式中： M_s 为饱和磁化强度； H_e 为有效磁场强度； H 为磁场强度； a 为无磁滞磁化曲线的形状参数； α 为磁畴内部耦合平均场参数。

不可逆磁化强度 M_{irr} 通常可以表示为微分形式：

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{\delta_M (M_{an} - M_{irr})}{k\delta} \quad (15)$$

$$\delta_M = \begin{cases} 1, & \text{sgn}(M_{an} - M) \cdot \text{sgn}(dH/dt) \geq 0 \\ 0, & \text{sgn}(M_{an} - M) \cdot \text{sgn}(dH/dt) < 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中： k 为钉扎系数，与磁化过程中的能量损耗有关； δ 为方向系数，当 $dH/dt > 0$ 时， $\delta = 1$ ，当 $dH/dt < 0$ 时， $\delta = -1$ 。

磁化过程中的能量守恒方程为

$$\mu_0 \int M_{an} dH_e = \mu_0 \int M dH_e + \mu_0 k \delta (1-c) \int (\frac{dM_{irr}}{dH_e}) dH_e \quad (17)$$

磁感应强度 B 、磁场强度 H 以及磁化强度 M 之间的关系如下：

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (18)$$

由以上公式推导得到以磁感应强度 B 为输入的 J-A 模型为

$$\frac{dM}{dB} = [\delta_M (M_{an} - M) + ck\delta \frac{dM_{an}}{dH_e}] / \{\mu_0 k\delta + \mu_0 (1-\alpha) [\delta_M (M_{an} - M) + ck\delta \frac{dM_{an}}{dH_e}]\} \quad (19)$$

铁心材料的磁滞特性由式(19)表示。

2.3 磁阻率的选取

定点磁阻率的取值影响非线性迭代的收敛性，选取不当将迭代不收敛。经典固定点法将磁阻率表示为^[16]

$$\nu_{FP1} = \frac{\nu_{dmin} + \nu_{dmax}}{2} \approx \frac{\nu_0}{2} \quad (20)$$

式中： ν_{dmin} 、 ν_{dmax} 分别为磁化曲线上微分磁阻率的最小值和最大值； ν_0 为真空磁阻率。

由于在整个计算过程中磁阻率保持不变，因此又被称为全局系数法，该方法总能保证收敛，但收敛速度慢，计算时间长。为此，Dlala 等提出了引入收敛因子 C 的局部系数法^[18]， C 为大于 1 的定值，

在每个时间步对磁阻率进行更新,当前时间步的磁阻率计算为

$$v_{\text{FP2}}^{(k)} = C \frac{\text{d}H^{(k-1)}}{\text{d}B} = C \frac{H_k - H_{k-1}}{B_k - B_{k-1}} \quad (21)$$

式中: B_k 为第 k 个时刻的磁感应强度; H_k 为利用 J-A 模型求得的第 k 个时刻的磁场强度。

该方法虽有助于减少迭代次数,但其收敛性高度依赖于收敛因子 C 的取值,需要审慎权衡。若 C 值设置较大,虽能提升收敛性,但由于前一时时刻的解未必是当前时刻的优质初值,为逼近真实解反而可能增加迭代次数与计算时间。反之,若 C 值设置较小,则可能在部分时间步直接失稳,导致无法收敛。本文选择如下方法形成磁阻率,即在每个时间步动态调整收敛因子:

$$v_{\text{FP3}}^{(k)} = \begin{cases} C^{(k)} \frac{H_k - H_{k-1}}{B_k - B_{k-1}}, & p > 0 \\ \left. \frac{\text{d}H}{\text{d}B} \right|_{\text{单值曲线}}, & p = 0 \end{cases} \quad (22)$$

首先,选定 C 的初值并保持不变。若每个时间步的步内迭代次数 p 达到阈值 p_{thr} ,则说明 C 的取值不足以使得迭代收敛,此时增大 C 重新计算磁阻率,这样可以快速达到收敛。算法流程图如图 2 所示。

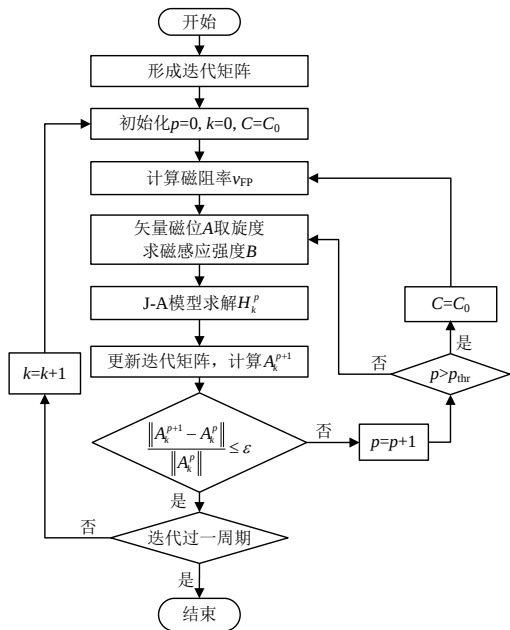


图 2 算法流程图

Fig. 2 Program flow chart

同时,若磁场强度 $H > H_{\text{thr}}$ 或磁感应强度 $B > B_{\text{thr}}$,则允许改变磁阻率,而当变化率小于阈值时,则不予修改,仍使用上一时间步求得的磁阻率^[21],可以避免由于 H 或 B 的不显著变化引起磁阻率突变的情

况。 H_{thr} 和 B_{thr} 均为小于 1 的值^[20]。

3 组合铁心励磁特性实验验证与分析

3.1 组合铁心励磁特性实验平台

本文采用如图 3 所示的实验平台对非晶合金-取向硅钢组合铁心的励磁特性进行测量。其中,使用可编程 CSW5550 电源输出励磁电压对组合铁心进行激励,感应电压使用高压差分探头测量,励磁电流由钳式电流探头测量,通过示波器对感应电压和励磁电流数据进行采集^[25]。组合铁心的立体结构如图 4 所示,基本参数如表 1 所示。经实验测得励磁线圈电阻为 0.05Ω 。

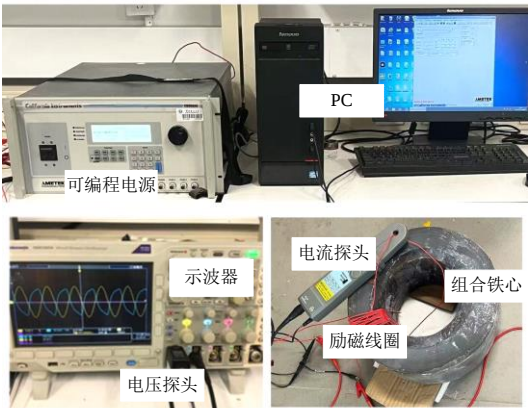


图 3 组合铁心实验平台

Fig. 3 Experimental platform of composite core

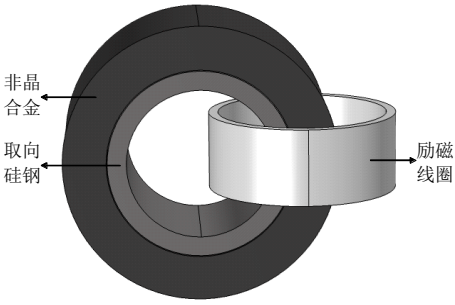


图 4 组合铁心立体结构

Fig. 4 Three dimensional structure diagram of composite core

表 1 组合铁心的结构参数

Table 1 Structural parameters of composite core

参数	取值
取向硅钢内半径 r_1/mm	75
取向硅钢外半径 r_2/mm	95.7
取向硅钢叠片系数 K_s	0.97
非晶合金内半径 r_3/mm	95.7
非晶合金外半径 r_4/mm	144
非晶合金叠片系数 K_A	0.86
组合铁心高度 h/mm	142
励磁线圈匝数 N	20

3.2 组合铁心的磁滞回线

本文采用粒子群(particle swarm optimization, PSO)优化算法^[26]对 J-A 模型进行参数提取, 该算法具有较好的收敛性和鲁棒性, 能够以较快的速度找到全局最优解所在的区域, 结果如表 2 所示。非晶合金和取向硅钢的模拟磁滞回线与实测磁滞回线的对比结果分别如图 5、6 所示。

表 2 J-A 模型参数

Table 2 Parameter of J-A model

参数	非晶合金		取向硅钢	
	1.35 T	1.45 T	1.28 T	1.73 T
M_s	1.780×10^6	1.839×10^6	1.759×10^6	1.979×10^6
k	9.539	11.189	20.294	20.116
a	1.936	2.971	7.652	8.64
a	5.533×10^{-6}	6.569×10^{-6}	10.341×10^{-6}	9.093×10^{-6}
c	0.131	0.207	0.016	0.018

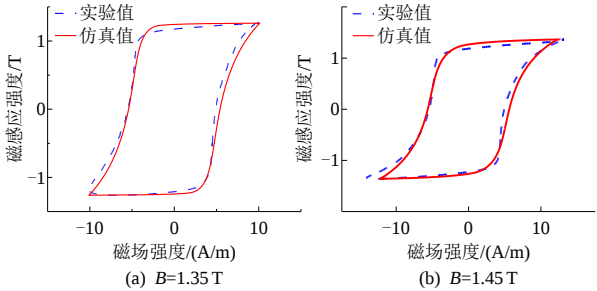


图 5 非晶合金磁滞回线

Fig. 5 Hysteresis loops of amorphous alloy

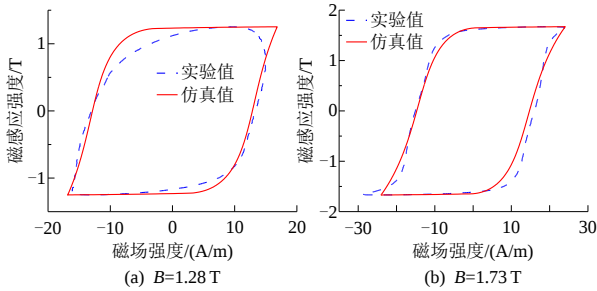


图 6 取向硅钢磁滞回线

Fig. 6 Hysteresis loops of oriented silicon steel

采用平均相对误差(mean relative error, MRE)表征仿真值与实验值之间的偏差, 即:

$$M_{RE} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{I_{cal}^n - I_{mea}^n}{I_{mea}^n} \times 100\% \quad (23)$$

式中: I_{mea}^n 为第 n 个采样点的测量值; I_{cal}^n 为计算值; n 为采样点个数。

通过计算, 仿真值与实验值之间的平均相对误差结果如表 3 所示。

从图 5、6 以及表 3 结果可以看出, 仿真结果与实验结果拟合较好, 因此本文采用上述结果进

表 3 平均相对误差结果

Table 3 Result of MRE

材料	磁密/T	平均相对误差/%
非晶合金	1.35	5.93
	1.45	7.99
取向硅钢	1.28	8.24
	1.73	7.75

行组合铁心励磁电流、空载损耗的求解。

3.3 组合铁心的励磁电流分析

根据本文建立的场路耦合模型和上述参数辨识结果, 通过求解式(10), 即可得到组合铁心的励磁电流。本文选取 C 的初值为 2, 求解了组合铁心在励磁电压为 39~59 V(对应磁感应强度为 1.1~1.6 T)下的励磁电流, 与实验值、全局系数法和局部系数法的对比结果如图 7 所示。其中, 当励磁电压为 39~51 V 时, 非晶合金和取向硅钢分别采用 1.35 和 1.28 T 时的磁滞回线; 而励磁电压为 55 和 59 V 时, 非晶合金和取向硅钢分别采用 1.45 和 1.73 T 时的磁滞回线。

如图 7 所示, 励磁电流的分布具有非轴对称性, 这表明励磁电流计算结果具有明显的磁滞效应。但使用本文方法会出现随着励磁电压的增大, 励磁电流不平滑的现象。以上 3 种方法计算励磁电流的精度同样使用平均相对误差来衡量。通过计算, 不同电压下的励磁电流 MRE 结果如表 4 所示。通过表 4 可以看出, 采用本文方法选取磁阻率时, 计算得到的励磁电流整体误差小于全局系数法以及局部系数法。

3.4 组合铁心的磁通密度分布分析

进一步分析组合铁心的磁通密度分布。通过求解式(10)得到组合铁心在励磁电压为 39~59 V 时各节点的矢量磁位 A , 然后取旋度即可求得各单元的磁感应强度。组合铁心在不同励磁电压下磁通密度峰值时刻的磁通密度分布如图 8 所示, 磁通密度峰值对比结果如图 9 所示。由图 8 可见, 当励磁电压小于 51 V 时, 内部硅钢铁心磁密很小, 磁密主要集中于非晶铁心中; 而当励磁电压大于 55 V 时, 非晶合金达到饱和, 此时内部硅钢磁密大于非晶磁密, 硅钢起到了防止外部非晶合金磁密过饱和的作用。

以励磁电压 $U=47$ V 和 $U=59$ V 为例, 组合铁心在一个周期内磁密分布的时域和频域结果分别如图 10、11 所示。由图 10、11 可知, 非晶合金和取向硅钢的磁通密度分布呈现非正弦形态, 这是因为二者的磁阻率存在较大差异, 同时前者主要包含

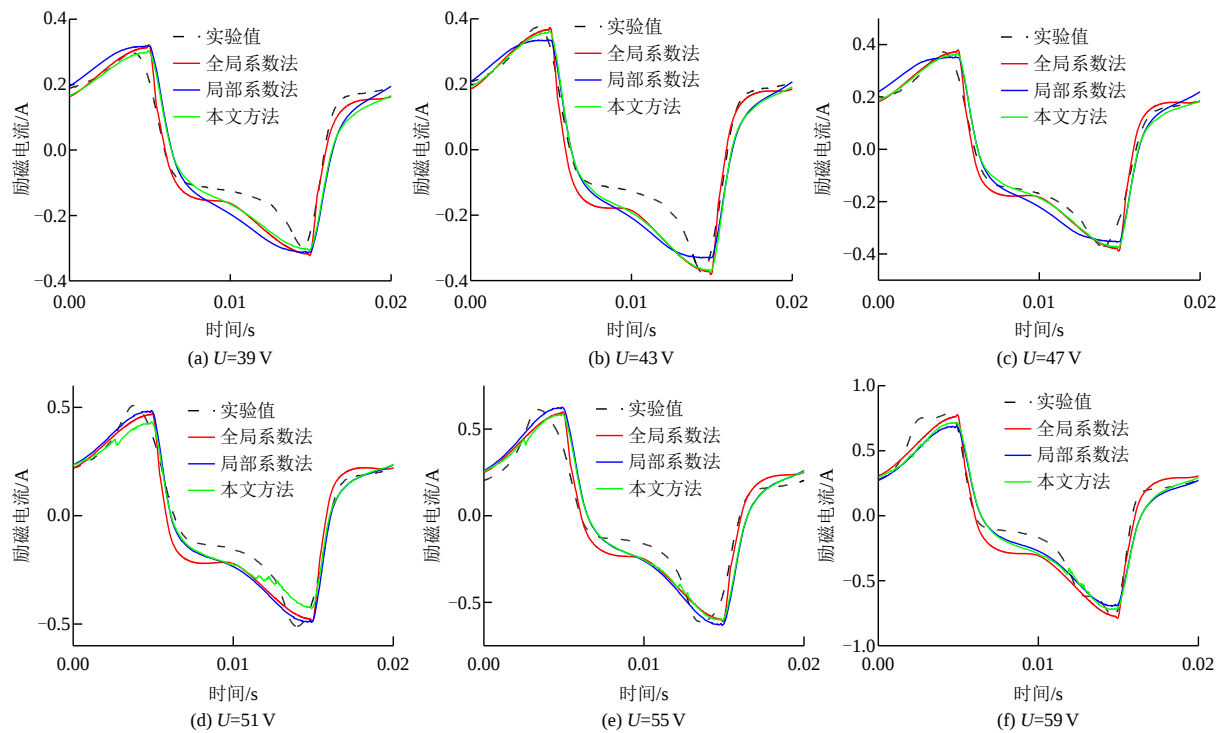


图 7 不同电压下的励磁电流

Fig. 7 Excitation current at different voltages

表 4 不同电压下的励磁电流 MRE 结果

Table 4 MRE results of excitation current at different voltages							
电压/V	全局系数法/%	局部系数法/%	本文方法/%	电压/V	全局系数法/%	局部系数法/%	本文方法/%
39	19.88	14.76	6.82	51	17.61	16.63	6.92
43	17.95	10.87	6.09	55	16.40	-2.09	-5.46
47	12.59	13.23	3.25	59	12.21	9.61	4.44

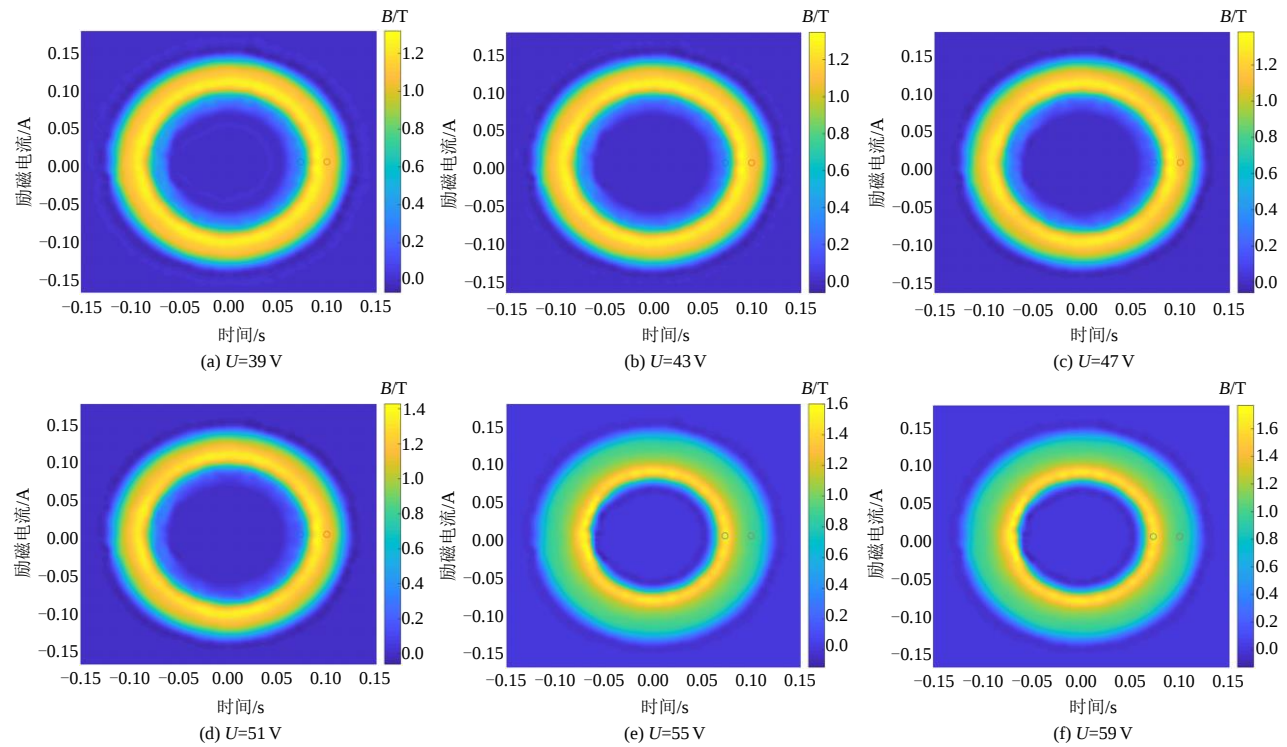


图 8 不同电压下峰值时刻的磁密

Fig. 8 Magnetic flux densities of composite core at peak of different voltages

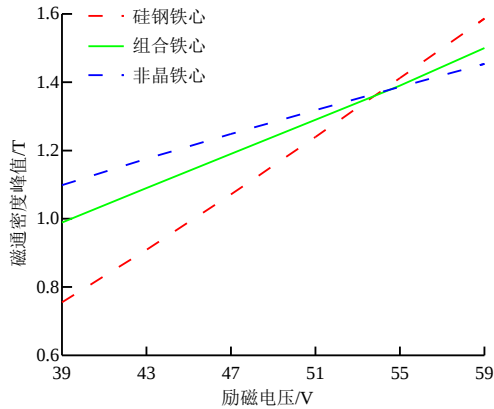
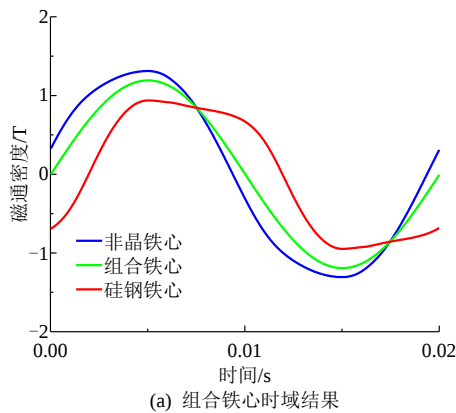
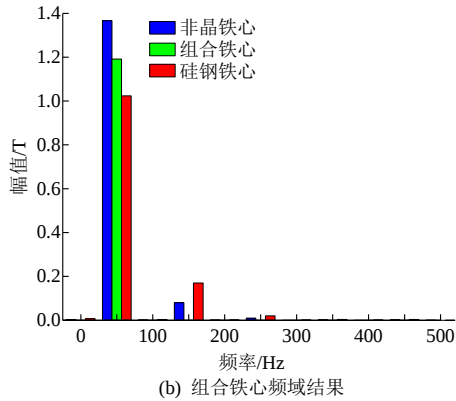


图 9 不同电压下的磁通密度峰值对比

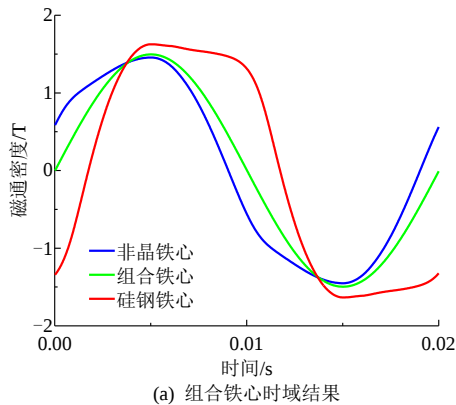
Fig. 9 Comparison of peak magnetic flux density under different voltages



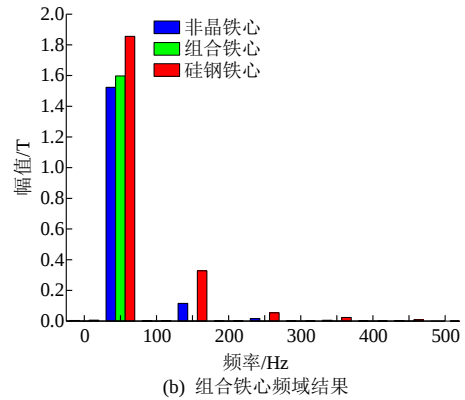
(a) 组合铁心时域结果



(b) 组合铁心频域结果

图 10 $U=47\text{ V}$ 组合铁心的磁密分布Fig. 10 Magnetic flux densities of composite core at $U=47\text{ V}$ 

(a) 组合铁心时域结果



(b) 组合铁心频域结果

图 11 $U=59\text{ V}$ 组合铁心的磁密分布Fig. 11 Magnetic flux densities of composite core at $U=59\text{ V}$

基波和 3 次谐波, 后者以基波、3 次谐波和 5 次谐波为主。而由法拉第电磁感应定律可知, 在外加正弦激励电压的条件下, 组合铁心整体的磁密呈正弦分布, 只包含基波分量。

3.5 组合铁心的空载损耗分析

本文利用式(24)求解组合铁心的空载损耗。图 12 对比了采用以上 3 种磁阻率选取方法、在不同励磁电压下计算得到的空载损耗结果。

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T I(t)U(t)dt \quad (24)$$

式中: T 为周期; I 、 U 分别为励磁电流和励磁电压。从图 12 可以看出, 随着励磁电压的增大, 空载损耗也会增大。

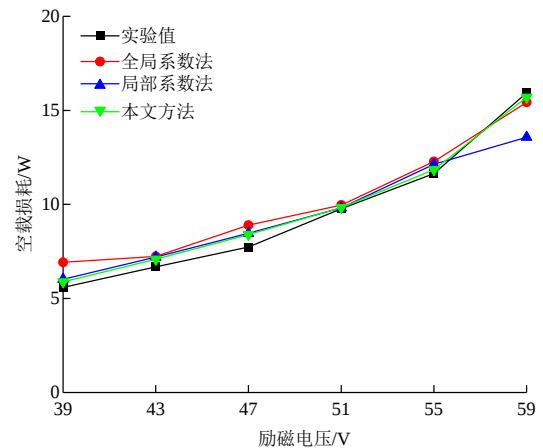


图 12 不同选取方法的空载损耗对比结果

Fig. 12 Comparison results of no-load loss under different selection methods

表 5 结果表明, 采用局部系数法和本文方法计算得到的相对误差均小于全局系数法, 且不超过 10%。同时, 本文方法的整体误差小于其他两种方法, 进一步验证了本文方法的有效性。

表 5 不同选取方法的空载损耗相对误差结果

Table 5 Results of relative error of no-load loss under different selection methods			
励磁电压/V	全局系数法/%	局部系数法/%	本文方法/%
39	23.93	6.84	4.34
43	8.35	6.79	5.09
47	14.99	8.39	7.55
51	2.03	0.5	0.67
55	5.55	3.28	1.8
59	3.16	10.94	1.49

3.6 收敛速度比较

图 13 对比了 3 种方法的迭代收敛速度，展示了每个时间步的迭代次数；表 6 列出了非线性迭代次数的平均值与最大值。由图 13 和表 6 可以看出，励磁电流达到峰值时，迭代次数最少，同时对比其他两种方法，本文采用的方法使得非线性迭代次数的平均值和最大值相比于全局系数法以及局部系数法均减小。基于以上分析可知，相对其他两种方法，本文方法的收敛速度有较大提高，验证了本文方法的可行性。

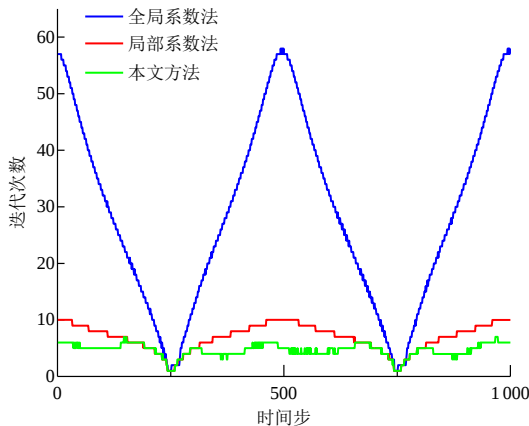


图 13 一个周期内各时间步迭代次数

Fig. 13 Number of iterations at each time step in a period

表 6 不同选取方法的非线性迭代次数

Table 6 Number of nonlinear iterations of different selection methods		
选取方法	非线性迭代次数的平均值	非线性迭代次数的最大值
全局系数法	28.877	58
局部系数法	6.946	10
本文方法	4.655	7

4 结论

本文基于固定点法，采用 J-A 模型表征磁滞效应，建立了考虑磁滞的电路-磁场耦合模型，通过设置阈值并在每个时间步动态改变收敛因子的方法确定磁阻率，求解了非晶合金-取向硅钢组合铁心在

不同励磁电压下的励磁电流，分析了组合铁心的磁通密度分布和空载损耗大小。

通过与全局系数法、局部系数法的对比，本文方法计算得到的各励磁电压下的平均相对误差以及空载损耗的相对误差均小于其他两种方法，且不超过 10%，验证了本文方法的有效性。同时，磁通密度分布显示，在较低励磁水平下，磁密主要集中于非晶合金中，随着励磁水平的上升，取向硅钢的磁密大于非晶合金；且通过磁密的频域结果可以看出，组合铁心整体的磁密呈正弦形态，非晶合金的磁密以基波和 3 次谐波为主，而取向硅钢的磁密除基波、3 次谐波外，还包含 5 次谐波；此外，本文方法使得计算精度和收敛速度均得到了提高。以上分析可为变压器优化设计提供参考。

参考文献

[1] 刘刚, 荣世昌, 武卫革, 等. 基于混合有限元法和降阶技术的油浸式变压器绕组 2 维瞬态流-热耦合场分析[J]. 高电压技术, 2022, 48(5): 1695-1704.
LIU Gang, RONG Shichang, WU Weige, et al. Two-dimensional transient flow-thermal coupling field analysis of oil-immersed transformer windings based on hybrid finite element method and reduced-order technology[J]. High Voltage Engineering, 2022, 48(5): 1695-1704(in Chinese).

[2] 李晓萍, 文习山, 陈慈萱, 等. 变压器铁心磁耦合下非线性特性曲线的研究[J]. 高电压技术, 2005, 31(12): 9-11.
LI Xiaoping, WEN Xishan, CHEN Cixuan, et al. Study of nonlinear characteristic curve for the core of transformer with magnetic coupling[J]. High Voltage Engineering, 2005, 31(12): 9-11(in Chinese).

[3] ABDULSALAM S G, XU Wenquan, DINAVAH V. Modelling and simulation of three-phase transformers for inrush current studies[J]. IEE Proceedings-Generation, Transmission, and Distribution, 2005, 152(3): 328-333.

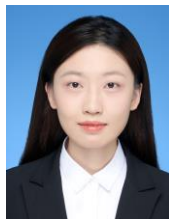
[4] 赵小军, 崔灿, 李琳, 等. 基于定点谐波平衡法的铁心磁滞与损耗特性分析[J]. 电工技术学报, 2014, 29(7): 10-18.
ZHAO Xiaojun, CUI Can, LI Lin, et al. Analysis of the hysteresis and loss characteristics in the laminated core by fixed-point harmonic-balanced method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(7): 10-18(in Chinese).

[5] 陈昊, 李琳, 刘洋. 基于 Energetic 模型的机械应力作用下电工钢片磁滞特性模拟[J]. 电工技术学报, 2023, 38(12): 3101-3111.
CHEN Hao, LI Lin, LIU Yang. Simulation of magnetic

- hysteresis characteristics of electrical steel sheet under mechanical stress based on energetic model[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2023, 38(12): 3101-3111(in Chinese).
- [6] 陈彬, 陈一博, 万妮娜, 等. 基于磁导-电容类比法和 Energetic 模型的高频变压器铁芯动态磁滞建模方法[J]. 中国电机工程学报, 2025, 45(16): 6591-6603.
- CHEN Bin, CHEN Yibo, WAN Nina, et al. Dynamic hysteresis modeling method for iron core in high-frequency transformers based on permeance-capacitance analogy and energetic model[J]. Proceedings of the CSEE, 2025, 45(16): 6591-6603(in Chinese).
- [7] VECCHIO R D. An efficient procedure for modeling complex hysteresis processes in ferromagnetic materials [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1980, 16(5): 809-811.
- [8] MÖRÉE G, LEIJON M. Review of play and preisach models for hysteresis in magnetic materials[J]. Materials, 2023, 16(6): 2422.
- [9] JILES D C. Frequency dependence of hysteresis curves in conducting magnetic materials[J]. Journal of Applied Physics, 1994, 76(10): 5849-5855.
- [10] 李贞, 李庆民, 李长云, 等. J-A 磁化建模理论的质疑与修正方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(3): 124-131.
- LI Zhen, LI Qingmin, LI Changyun, et al. Queries on the J-A modeling theory of the magnetization process in ferromagnets and proposed correction method[J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(3): 124-131(in Chinese).
- [11] 赵越, 李琳, 刘任, 等. 基于损耗统计理论的动态 J-A 磁滞模型[J]. 电工电能新技术, 2019, 38(5): 90-96.
- ZHAO Yue, LI Lin, LIU Ren, et al. New dynamic hysteresis J-A model based on statistical theory of losses[J]. Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy, 2019, 38(5): 90-96(in Chinese).
- [12] 贲彤, 安妮, 陈龙, 等. 基于改进多尺度动态 J-A 模型的无取向硅钢磁致伸缩特性模拟[J]. 中国电机工程学报, 2025, 45(11): 4514-4526.
- BEN Tong, AN Ni, CHEN Long, et al. Simulation of magnetostrictive properties of non-oriented silicon steel based on improved multiscale dynamic J-A model[J]. Proceedings of the CSEE, 2025, 45(11): 4514-4526(in Chinese).
- [13] YUAN Weiying, YUAN Jiansheng. Field - circuit coupling numerical calculation method of transformer remanence[J]. IET Electric Power Applications, 2022, 16(8): 856-868.
- [14] SAITZ J. Newton-Raphson method and fixed-point technique in finite element computation of magnetic field problems in media with hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1999, 35(3): 1398-1401.
- [15] 王帅兵, 李琳, 赵小军, 等. 定点时间周期有限元法及其在变压器直流偏磁特性分析中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2017, 37(17): 5198-5205.
- WANG Shuaibing, LI Lin, ZHAO Xiaojun, et al. Fixed-point time-periodic finite element method and its application for DC bias characteristics of transformer[J]. Proceedings of the CSEE, 2017, 37(17): 5198-5205(in Chinese).
- [16] HĂNȚILĂ F I. A method of solving stationary magnetic field in non-linear media[J]. Revue Roumaine des Sciences Techniques. Série Électrotechnique et Énergétique, 1975, 20(3): 397-407.
- [17] HANTILA F I, PREDA G, VASILIU M. Polarization method for static fields[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2000, 36(4): 672-675.
- [18] DLALA E, BELAHCEN A, ARKKIO A. A fast fixed-point method for solving magnetic field problems in media of hysteresis[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(6): 1214-1217.
- [19] DLALA E, BELAHCEN A, ARKKIO A. Locally convergent fixed-point method for solving time-stepping nonlinear field problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2007, 43(11): 3969-3975.
- [20] DLALA E, ARKKIO A. Analysis of the convergence of the fixed-point method used for solving nonlinear rotational magnetic field problems[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(4): 473-478.
- [21] MATHEKGAME, MCMAHON R A, KNIGHT A M. Application of the fixed point method for solution in time stepping finite element analysis using the inverse vector Jiles-Atherton model[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2011, 47(10): 3048-3051.
- [22] 陈昊, 李琳. 非晶合金-取向硅钢组合铁心结构设计及其磁-振动特性分析[J]. 电工技术学报, 2024, 39(10): 2925-2936.
- CHEN Hao, LI Lin. Structure design and magnetic-vibration characteristics analysis of amorphous alloy and oriented silicon steel composite iron core[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2024, 39(10): 2925-2936(in Chinese).
- [23] 孙佳安, 李琳, 王亚琦. 考虑次同步分量的变压器时间并行有限元及铁心动态损耗分析[J]. 中国电机工程学报, 2023, 43(6): 2426-2437.
- SUN Jia'an, LI Lin, WANG Yaqi. Finite element method for transformers using parareal and core dynamic loss analysis considering subsynchronous components[J]. Proceedings of the CSEE, 2023, 43(6): 2426-2437(in Chinese).

- [24] CHWASTEK K. Modelling of dynamic hysteresis loops using the Jiles-Atherton approach[J]. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2009, 15(1): 95-105.
- [25] 陈昊, 李琳, 宋文乐, 等. 考虑磁滞效应的非晶合金-取向硅钢组合铁心双非线性励磁特性研究[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(19): 7877-7888.
- CHEN Hao, LI Lin, SONG Wenle, et al. Study of dual nonlinear excitation characteristics of amorphous alloy and oriented silicon steel composite core considering hysteresis effect[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(19): 7877-7888(in Chinese).
- [26] 郝晓亮, 叶美盈. 基于粒子群优化算法的 Jiles-Atherton 磁滞模型参数计算[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2015, 38(2): 133-141.
- HAO Xiaoliang, YE Meiyong. Parameter calculation of the Jiles-Atherton hysteresis model using particle swarm optimization algorithm[J]. Journal of Zhejiang Normal

University: Natural Sciences, 2015, 38(2): 133-141(in Chinese).



陈谷雨

在线出版日期: 2025-04-22。

收稿日期: 2024-07-16。

作者简介:

陈谷雨(2000), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为电磁场数值计算, Chengyu085@163.com;

李琳(1962), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电磁场理论及应用与先进输电技术, lilin@ncepu.edu.cn;

吴胜威(1998), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为电磁场数值计算, wsw1064@163.com。

(编辑 陈娟)